Другий етап Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики
(Дніпропетровська область)
Умови та розв'язання задач

9 клас

1. Розв'яжіть рівняння

$$\frac{x^2-4x+3}{x-1}=0$$

Розв'язання.
Легко обчислити корені квадратного тричлену у чисельнику – 1 та 3. Але області допустимих значень рівняння задовольняє лише число 3.

2. Довжина середньої лінії трапеції дорівнює 5см, а довжина відрізка, що сполучає середини основ – 3 см. Кути при більшій основі дорівнюють 30°та 60°. Знайти довжини основ трапеції та її висоту.

Розв'язання (вказівки).
Нехай $ABCD$ *дана трапеція, причому* $\angle A=30^\circ$, $\angle D=60^\circ$. *Точка* M *- середина* BC, *а точка* N *- середина* AD. *Через* M *проведемо прямі, що паралельні* AB *і* CD. *Нехай ці прямі перетинають* AD *у точках* K,P *відповідно. Тоді легко побачити, що трикутник* KMP *прямокутний і* MN *його медіана. Тоді гіпотенуза* $KP=2MN=6см$. *Тоді* $MP=\frac{1}{2}KP=3см$, *а висота* $ME=MP\cdot\sin 60^\circ=\frac{3\sqrt{3}}{2}см$. *Така ж буде й висота трапеції. Далі маємо, що* $AD-BC=6, AD+BC=10$. *Розв'язуємо відповідну систему рівнянь, маємо:* $AD=8см, BC=2см$.

3. Квадрат 10×10 горизонтальними та вертикальними лініями розділений на 100 однакових квадратиків. Скількома способами з цього квадрату можна видалити якісь два сусідні квадратики з даних 100?. Квадратики вважаються сусідніми, якщо мають хоча б одну спільну точку.

Розв'язання
Розглянемо спочатку таку допоміжну задачу:" Квадрат 10×10 *горизонтальними та вертикальними лініями розділений на 100 однакових квадратиків. Скількома способами якісь два сусідні квадратики з даних 100 можна зафарбувати в синій і чорний кольори (кожний у свою)? "Розв'язання цієї задачі таке. Якщо синій квадратик буде знаходитись у кутовій клітинці (а таких можливостей – 4), то чорний можна зафарбувати 3 способами, отже усього можливостей зафарбувати, коли синій у кутових –* $3\cdot4=12$ *способів. Якщо синій буде знаходитись на периметрі квадрату, але не у кутовій клітинці, то чорний можна зафарбувати 5 способами, усього маємо -* $4\cdot8\cdot5=160$*способів. Якщо ж синій всередині квадрата (таких можливостей –* $8\cdot8=64$*), то можливостей*

зафарбувати чорний 8, отже усього таких способів – $64 \cdot 8 = 512$. *Остаточно маємо* $12 + 160 + 512 = 684$ *способи.*

Повернемося до нашої задачі. Ти клітинки, що ми видаляємо "рівноправні", тому при підрахунку у допоміжній задачі одна й та сама пара враховується двічі, таким чином, результат допоміжної задачі треба розділити навпіл: $684/2 = 342$

4. Знайдіть найбільше ціле невід'ємне k таке, що $1! + 2! + 3! + \ldots + 2013!$ ділитися на 3^k. (Для натурального числа m будемо вважати $m! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot m$, $1! = 1$, $2! = 1 \cdot 2$)

Розв'язання.
Доведемо, що $k = 2$. *Очевидно, що числа* $6!, 7!, \ldots, 2013!$ *діляться на 9.*
Безпосередньо знаходимо $1! + 2! + 3! + 4! + 5! = 1 + 2 + 6 + 24 + 120 = 153 \vdots 9$.
Підрахуємо $1! + 2! + \ldots + 7! = 5913 \vdots 27$. *Очевидно, що числа* $9!, 10!, \ldots, 2013!$ *діляться на 27. Але* $8!$ *не ділиться на 27. Тобто наша сума не ділиться на 27.*

5. У координатній площині проведено пряму. Скільки на цій прямій може бути точок, обидві координати яких – цілі числа?

Розв'язання.

Легко побачити, що на прямій $y = \sqrt{3}x$ *лише точка* $(0,0)$ *цілочисельна. Нехай на деякій прямій є дві цілочисельні точки. Якщо пряма паралельна вісі ординат і на ній є хоча б одна точка з цілочисельними координатами, то таких точок, очевидно, безліч.*

Розглянемо ситуацію, коли пряма є графіком деякої лінійної функції $y = kx + b$. *Нехай точки з цілочисельними координатами* (x_1, y_1), (x_2, y_2), *(причому* $x_1 < x_2$*) належать графіку лінійної функції* $y = kx + b$. *Нехай* $t = x_2 - x_1$, $x_3 = x_2 + t$. *Візьмемо точку* (x_3, y_3) *на нашій прямій, тоді* $y_3 = k(x_2 + t) + b = k(2x_2 - x_1) + b = 2kx_2 + 2b - (kx_1 + b) = 2y_2 - y_1$ *– ціле число. Отже, точка* (x_3, y_3)*- цілочисельна, причому* $x_2 < x_3$. *Аналогічно за парою* (x_2, y_2), (x_3, y_3) *будується цілочисельна точка графіку* (x_4, y_4), *цей процес можна продовжувати нескінченно. Отже, точок завжди нескінченна кількість.*

Завдання для другого етапу олімпіади розроблено експертною групою при механіко-математичному факультеті Дніпропетровського національного університету імені Олеся Гончара.

Тексти задач запропонували: Кірман В. К., Поляков О. В., Козиненко О. В.