**Другий етап Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики**
**(Дніпропетровська область)**
**Умови та розв'язання задач**

**8 клас**

1.У саду ростуть тільки сливи та груші. Кількість слив відноситься до кількості груш, як 3:8. Скільки слив у саду , якщо загальна кількість дерев більша за 130, але менша за 140?

*Розв'язання.*

*Можна вважати, що слив* $3x$, *а груш* $8x$. *Якщо* $x = \frac{m}{n}$ *- нескоротний дріб,де* $n > 1$ *то одночасно* $n = 3$ *та* $n = 8$, *що не є можливим. Отже,* $x$ *– натуральне число. Тоді* $130 < 11x < 140$, *маємо, що* $11x = 132$, *бо 132 єдине число від 130 до 140, яке націло ділиться на 11. Маємо остаточно, що слив – 36.*

2. Дано два концентричних кола (з єдиним центром). Відрізки $AB$ і $CD$ є діаметрами цих кіл. Відомо, що точки $A, B, C$ не лежать на одній прямій. Доведіть, що прямі $AC$ і $BD$ паралельні.

*Розв'язання (вказівка)*
*Легко побачити, що якщо* $A, B, C$ *не лежать на одній прямій, то* $ABCD$ паралелограм.

3. Квадрат $10 \times 10$ горизонтальними та вертикальними лініями розділений на 100 однакових квадратиків. Скількома способами якісь два сусідні квадратики з даних 100 можна зафарбувати в синій і чорний кольори (кожний у свою)?. Квадратики вважаються сусідніми, якщо мають хоча б одну спільну точку.

*Розв'язання*
*Якщо синій квадратик буде знаходитись у кутовій клітинці ( а таких можливостей – 4), то чорний можна зафарбувати 3 способами, отже усього можливостей зафарбувати, коли синій у кутових –* $3 \cdot 4 = 12$ *способів. Якщо синій буде знаходитись на периметрі квадрату, але не у кутовій клітинці, то чорний можна зафарбувати 5 способами, усього маємо -* $4 \cdot 8 \cdot 5 = 160$ *способів. Якщо ж синій всередині квадрата (таких можливостей –* $8 \cdot 8 = 64$*), то можливостей зафарбувати чорний 8, отже усього таких способів –* $64 \cdot 8 = 512$. *Остаточно маємо* $12 + 160 + 512 = 684$ *способи.*

4. Чи буде число $81^{2013} + 4$ простим ?

*Розв'язання.*
*Ні. Розглянемо допоміжний вираз*

$$x^4+4=x^4+4x^2+4-4x^2=\left(x^2+2\right)^2-(2x)^2=\left(x^2-2x+2\right)\left(x^2+2x+2\right)$$

*Тоді, скористуємось останньою формулою*

$$81^{2013}+4=\left(3^{2013}\right)^4+4=\left(\left(3^{2013}\right)^2-2\cdot 3^{2013}+2\right)\cdot\left(\left(3^{2013}\right)^2+2\cdot 3^{2013}+2\right)$$

*Очевидно, що жоден з множників не дорівнює 1. Тому число* $81^{2013}+4$ *- складене.*

5. В координатній площині проведено пряму. Відомо, що на цій прямій є принаймні дві точки, обидві координати яких – цілі числа. Скільки ще таких точок є на даній прямій? Відповідь обґрунтувати.

*Розв'язання.*

*Якщо пряма паралельна вісі ординат і на ній є хоча б одна точка з цілочисельними координатами, то таких точок, очевидно, безліч. Розглянемо ситуацію, коли пряма є графіком деякої лінійної функції* $y=kx+b$. *Нехай точки з цілочисельними координатами* $(x_1,y_1)$, $(x_2,y_2)$ , *(причому* $x_1<x_2$*) належать графіку лінійної функції* $y=kx+b$. *Нехай* $t=x_2-x_1$, $x_3=x_2+t$. *Візьмемо точку* $(x_3,y_3)$*на нашій прямій, тоді* $y_3=k(x_2+t)+b=k(2x_2-x_1)+b=2kx_2+2b-(kx_1+b)=2y_2-y_1$ *– ціле число. Отже, точка* $(x_3,y_3)$*- цілочисельна, причому* $x_2<x_3$. *Аналогічно за парою* $(x_2,y_2)$, $(x_3,y_3)$ *будується цілочисельна точка графіку* $(x_4,y_4)$, *цей процес можна продовжувати нескінченно. Отже, точок завжди нескінченна кількість.*

Завдання для другого етапу олімпіади розроблено експертною групою при механіко-математичному факультеті Дніпропетровського національного університету імені Олеся Гончара.

Тексти задач запропонували Поляков О. В.; Кірман В. К., Козиненко О. В.