Другий етап Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики
(Дніпропетровська область)
Умови та розв'язання задач

<u>7 клас</u>

1.За перший день триденної велогонки велосипедисти проїхали 7/15 усього маршруту, за другий – 2/5 усього маршруту, за третій – решту 40 км. Знайдіть довжину усього маршруту.

Розв'язання.
За перший та другий день проїхали
7/15+2/5=13/5 шляху. Залишилося проїхати 2/15, що складає 40 км. Тому повний шлях: 40:(2/15)=300 км.

2. Знайдіть усі трицифрові непарні числа, кратні 45, у записі якого усі цифри не перевищують 6.

Розв'язання.
Нехай $\overline{abc}$ *таке число. Тоді очевидно, що* $c = 5$. *За ознакою подільності на 9 маємо, що* $a + b + 5 \vdots 9$ *і в той же час* $6 \le a + b + 5 \le 17$. *Але тоді існує єдина можливість:* $a + b + 5 = 9$ *або* $a + b = 4$. *Тепер простим перебором отримаємо наші числа: 405, 315, 225, 135.*

3. Довжина відрізка AB дорівнює 10 см. Дівчина Катя на прямій AB обирає точку X. Яке найбільше і яке найменше значення може набувати величина $|XA - XB|$?

Розв'язання.
Очевидно, що найменше значення дорівнює нулю, коли X *- середина відрізку* AB. *Далі. Якщо* X *знаходиться на відрізку* AB, *то найбільше значення* $|XA - XB|$ *дорівнює 10. Розглянемо випадок, коли* X *буде поза відрізком* AB. *Можна розглянути випадок, коли точка* X *буде на промені* AB *(аналогічно розглядається випадок, коли* X *буде на промені* BA*). Тоді очевидно, що* $XA - XB = AB = 10$. *Отже, найбільше значення – 10.*

4. Квадрат $n \times n$ вертикальними та горизонтальними смугами розділений на n^2 однакових квадратиків. Сашко та Наталка, грають у таку гру. Вони по черзі видаляють декілька квадратиків, що стоять поруч, з обраної горизонтальної або вертикальної смуги (можна видалити і рівно один квадрат). Програє той, хто не може зробити хід. Сашко починає грати першим. Для яких n Сашко може грати так, щоб незалежно від ходів Наталки вигравати? Для яких n Наталка може грати так, щоб незалежно від ходів Сашка вигравати?

Розв'язання.
Якщо n *непарне, то Сашко першим кроком видаляє центральну клітинку, а далі робить ходи так, що видаляє групу клітинок, що симетрична видаленим*

Наталкою відносно центру (в учнівських роботах допускаються міркування з посиланням лише на рисунок). Таким чином, якщо Наталка може зробити хід, то його зробить і Сашко. Тобто Сашко програти при такій грі не може. А так як усього клітинок скінчена кількість, то гра колись завершиться, програє Наталка.

Аналогічно повинна грати Наталка, якщо n парне. Вона повинна робити ходи, симетричні ходам Сашка.

5. П’ятсот учнів школи №5 вишукувались в одну велику шеренгу. Скількома способами цю шеренгу можна доповнити двома учнями школи №6 так, щоб між цими двома учнями було принаймні чотири учня школи №5?

Розв’язання.

Будемо вважати, що в шерензі є лівий та правий фланги. Назвемо нових учнів А і Б. Розглянемо випадок, коли А знаходиться лівіше за Б. Усього є 501 позиція, де можуть стоятиме або А або Б. Пронумеруємо ці позиції починаючи з лівого флангу. Якщо А займає першу позицію, то Б може займати 5, 6, 7,…,501 позиції – усього $501-4=497$ *позицій. Якщо А займає другу позицію, то Б може займати 6, 7, 8,…,501 позиції – усього* $501-5=496$ *позицій. Остання можливість для А у цьому випадку зайняти 497 позицію. Тоді для Б залишиться лише одна можливість – 501 позиція. Усього тоді кількість способів розставити А і Б для цього випадку дорівнює* $S=1+2+3+...+497$

Застосуємо відомий спосіб підрахування цієї суми, записав її у зворотному порядку: $S=497+496+...+3+2+1$.

Тоді

$$2S=(497+1)+(496+2)+...+(2+496)+(1+497)$$
$$=498\cdot 497=(500-2)\cdot(500-3)=247506$$

Очевидно, що кількість способів розташування, коли Б лівіше за А також дорівнює $S=1+2+3+...+497$. *Тоді шукана кількість способів* $2S=247506$

Завдання для другого етапу олімпіади розроблено експертною групою при механіко-математичному факультеті Дніпропетровського національного університету імені Олеся Гончара.

Тексти задач запропонували Кірман В. К., Поляков О. В., Козиненко О. В.